qui s'annule en 0. (1)

$\star$ la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$ est la primitive sur $[0,1[$ de $\left(t \mapsto \frac{t^{2n}}{1-t^2}\right)$ qui s'annule en 0.

aussi h est dérivable sur $[0,1[$

Donc $\forall x \in [0,1[; \left(h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt\right)' = h'(x) - \frac{x^{2n}}{1-x^2}$

$$= \frac{1}{1-x^2} - \frac{x^{2n}}{1-x^2} = \frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$$

D'autre part $h(0) - \int_0^0 \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+0}{1-0} - 0 = 0$

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$ est la primitive sur $[0,1[$ de $\left(t \mapsto \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}\right)$ qui s'annule en 0 (2)

(1) et (2) $\Rightarrow S_n(x) = h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$

b- $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 3^3} + \frac{1}{5\times 3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).3^{2n-1}}$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}}{(2n-1)} = S_n\left(\tfrac{1}{3}\right) = h\left(\tfrac{1}{3}\right) - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\text{Log}2 - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

• $0 \le t \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 \le t^2 \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \ge -t^2 \ge -\frac{1}{9}$

$$\Leftrightarrow 1 \ge 1-t^2 \ge 1-\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{1-t^2} \le \frac{9}{8} \Leftrightarrow t^{2n} \le \frac{t^{2n}}{1-t^2} \le \frac{9}{8}t^{2n}$$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n}dt \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{8}t^{2n}dt$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^{\frac{1}{3}} \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le \frac{9}{8}\left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \le \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le \frac{9}{8}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right] = 0$ car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt\right) = 0$

En conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\text{Log}2$.